



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

O2F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۲۲

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراح سؤال	ویراستاران
نیما نیکنام	میلاد حسینی نامی
	ارسلان حسنوند
	سید جواد نظری

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- اگر مختصات سه رأس یک متوازی‌الاضلاع $(-۲, ۱)$ ، $(۰, ۳)$ و $(۲, -۱)$ باشد، مختصات رأس چهارم آن کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $(۴, ۱)$ (۲) $(-۴, ۵)$ (۳) $(۰, -۳)$ (۴) $(۶, ۳)$

پاسخ: گزینه ۴

قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس وسط هر دو قطر بر هم منطبق است، بنابراین اگر A, B, C, D رئوس یک متوازی‌الاضلاع با قطرهای BD, AC باشند، باید:

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$

حالا با توجه به این که اینجا ترتیب رأس‌ها مشخص نیست، باید سه حالت در نظر بگیریم، یعنی اگر مختصات رأس چهارم (x, y) باشد، داریم:

حالت اول: $(۰, ۳)$ و $(۲, -۱)$ دوسر یک قطر و (x, y) و $(-۲, ۱)$ دو سر قطر دیگر، پس:

$$\begin{cases} -۲ + x = ۲ + ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ ۱ + y = -۱ + ۳ \Rightarrow y = ۱ \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات رأس چهارم } (۴, ۱)$$

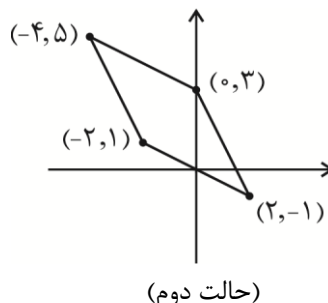
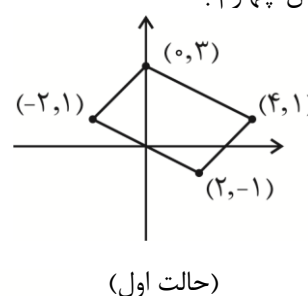
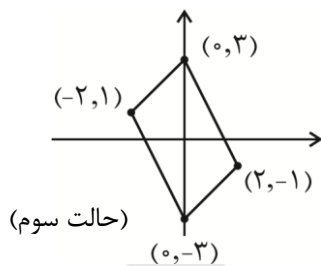
حالت دوم: $(۰, ۳)$ و $(-۲, ۱)$ دوسر یک قطر و (x, y) و $(۲, -۱)$ دو سر قطر دیگر، پس:

$$\begin{cases} ۲ + x = -۲ + ۰ \Rightarrow x = -۴ \\ -۱ + y = ۱ + ۳ \Rightarrow y = ۵ \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات رأس چهارم } (-۴, ۵)$$

حالت سوم: $(۲, -۱)$ و $(-۲, ۱)$ دوسر یک قطر و (x, y) و $(۰, ۳)$ دو سر قطر دیگر، پس:

$$\begin{cases} ۰ + x = -۲ + ۲ \Rightarrow x = ۰ \\ ۳ + y = ۱ + (-۱) \Rightarrow y = -۳ \end{cases} \Rightarrow \text{مختصات رأس چهارم } (۰, -۳)$$

خلاصه گزینه ۴ نمی‌تواند رأس چهارم باشد.



این‌ها هم شکل هر سه حالت.

۲- دو نقطه روی محور x ها وجود دارد که مجموع فواصل آنها از نقاط $A(۲, ۰)$ و $B(k, ۰)$ برابر ۱۲ است. فاصله آن دو نقطه برابر کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۶ (۴) ۵

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



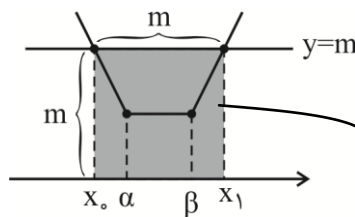
پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم مختصات نقطه‌ی روی محور x ها، $(x, 0)$ است، در این صورت مجموع فواصل این نقطه تا نقاط A و B برابر $|x-2|+|x-k|$ است، حال اگر معادله‌ی $|x-2|+|x-k|=12$ دارای دو ریشه باشد، اختلاف دو ریشه همان فاصله‌ی دو نقطه مورد نظر است. حالا این نکته را یاد بگیرید که در معادلات به صورت:

$$|x-\alpha|+|x-\beta|=m$$

اگر دو ریشه داشته باشیم، اختلاف دو ریشه همان m است.

به عنوان مثال: $|x-2|+|x-3|=7$ را در نظر می‌گیریم که دارای ریشه‌های $x=6$ و $x=-1$ است و اختلاف ریشه‌ها همان عدد ۷ است. به عبارتی در نمودار تابع $f(x)=|x-\alpha|+|x-\beta|$ که به نمودار گلدانی معروف است، اگر خط $y=m$ با تابع دو نقطه برخورد داشته باشد. (به این منظور باید $m>|\alpha-\beta|$ باشد) اختلاف طول نقاط برخورد برابر m است. $x_1-x_2=m$



(چهارضلعی هاشورخورده مربع است.)

۳- نقطه A به فاصله ۲ سانتی‌متری از خط d قرار دارد، تعداد نقاطی در صفحه که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند، کدام است؟

۴ (۴)

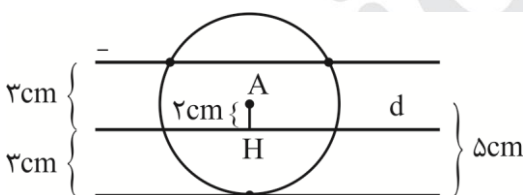
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نقاطی که از نقطه A به فاصله ۵ سانتی‌متری قرار دارند، روی محیط دایره‌ای به شعاع ۵ قرار دارند. و نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متری قرار دارند، روی دو خط موازی قرار دارند که فاصله این خطوط تا d ، ۳ سانتی‌متر است. اشتراک این دو خط با دایره سه نقطه است.



دقت کنید اگر فاصله تا A بزرگتر پنج مدنظر بود، تعداد نقاط ۴ عدد می‌شد و اگر فاصله بین یک و پنج مدنظر بود تعداد نقاط ۲ عدد می‌شد و اگر فاصله برابر یک مدنظر بود تعداد نقاط ۱ عدد می‌شد و اگر فاصله کوچکتر از یک بود تعداد نقاط صفر می‌شد. در ضمن

$$(d \text{ تا } A) + (d \text{ تا } A) = 5$$

$$|(d \text{ تا } A) - (d \text{ تا } A)| = 1$$

به این دلیل اعداد ۱ و ۵ به عنوان مرز هستند.



۴- مجموع طول نقاطی که روی خط $y = 2x + 3$ هستند و فاصله آنها از خط $3x + 4y - 1 = 0$ برابر ۳ واحد است، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

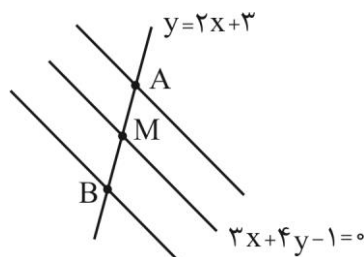
-۲ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

حل: شاید فکر کردی لازمه فاصله نقطه از خط بری البته اون جوری هم میشه ولی این جوری راحت تره.

شکل تقریبی این جوریه:



ما دنبال مجموع طول نقاط A, B هستیم که خوب دو برابر طول نقطه M است، زیرا M وسط A, B است $(x_A + x_B = 2x_M)$ از طرفی M محل برخورد دو خطه پس کافیه دستگاه زیر را حل کنیم و طول به دست آمده رو دو برابر کنیم.

یعنی:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{y=2x+3} 3x + 4(2x + 3) - 1 = 0$$

$$11x + 11 = 0 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\times 2} -2 = (B, A \text{ مجموع طول})$$

۵- اگر نقطه $A(2, 3)$ یک رأس مربع و خطوط d_1 و d_2 به معادلات $2x - 3y + m = 0$ و $ax + by = 0$ دوزلع مجاور این مربع

باشند، مجموع مقادیر m کدام است؟

-۱۰ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: باید فاصله A تا خطوط d_1 و d_2 برابر باشد، پس:

$$\frac{|2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 9 + m|}{\sqrt{4 + 9}} \Rightarrow |m - 5| = \text{عدد مثبت}$$

و محور تقارن $|m - 5|$ ، $m = 5$ است و در برخورد با یک عدد مثبت دو ریشه دارد که جمع آنها دو برابر ۵ است، یعنی ۱۰.

درواقع ریشه‌ها به صورت: (عدد مثبت $+ 5 = m_1$) و (عدد مثبت $- 5 = m_2$) می‌باشند.

روش دوم: اگر هدف یافتن طول ضلع مربع یا مقادیر m بود، باید اینطور عمل می‌کردیم:

$$\text{اولاً: } d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow (-1 = \text{شیب } d_1 \times \text{شیب } d_2)$$

یعنی:

$$d_2 \text{ شیب} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow d_2 \text{ شیب} = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$$

و معادله d_2 به صورت زیر است:

$$y = \frac{-3}{2}x \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



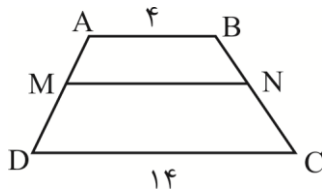
ثانیاً فاصله A از d_1 و d_2 برابر است و برابر طول ضلع مربع:

$$\frac{|3 \times 2 + 2 \times 3|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|2 \times 2 - 3 \times 3 + m|}{\sqrt{9+4}} \Rightarrow$$

$$12 = |m - 5| \Rightarrow m_1 = 17, m_2 = -7$$

و مجموع مقادیر m برابر $(-7 + 17 = 10)$ است و البته طول ضلع مربع $\frac{12}{\sqrt{13}}$ است.

۶- در ذوزنقه زیر $\frac{AM}{MD} = \frac{2}{3}$ و MN موازی قاعده‌ها رسم شده و $AB = 4$ و $CD = 14$ است. طول MN کدام است؟



۹ (۱)

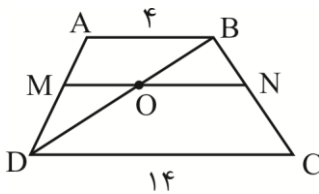
۶ (۲)

۱۰ (۳)

۸ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

روش اول: قطر BD را رسم می‌کنیم و در دو مثلث ABD و BCD با استفاده از قضیه تالس طول MO و NO را به دست می‌آوریم:



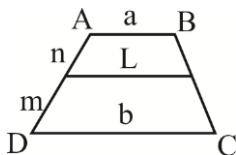
$$\frac{NO}{DC} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \frac{NO}{14} = \frac{2}{5} \Rightarrow NO = \frac{28}{5}$$

$$\frac{MO}{AB} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow \frac{MO}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow MO = \frac{12}{5}$$

$$MN = MO + NO = \frac{12}{5} + \frac{28}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

میشه اینجوری نتیجه‌گیری کرد که:

در ذوزنقه‌ی زیر داریم:



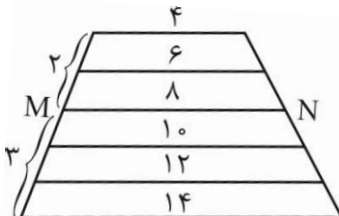
$$L = \frac{ma + nb}{m + n}$$

$$MN = \frac{2 \times 14 + 3 \times 4}{2 + 3} = 8$$

پس:

روش دوم: می‌توانیم از یک تناسب ساده استفاده کنیم، اگر فرض کنیم طول AD برابر ۵ واحد، به ازای این ۵ واحد اختلاف طول AB با DC برابر $10 = 14 - 4$. حالا اگر ۲ واحد روی AD پایین بیاوریم، طول MN نسبت به طول AB ، $2 \times 2 = 4$ واحد افزایش پیدا می‌کند، در واقع به ازای هر یک واحد حرکت روی AD ، ۲ واحد افزایش طول افقی داریم:

این درست مثل اینه که ما یک دنباله‌ی حسابی داشته باشیم با جمله‌ی اول ۴ و ششم ۱۴ و حالا جمله‌ی سوم رو بخواهیم.



$$d = \frac{14 - 4}{6 - 1} = \frac{10}{5} = 2$$

طول AD

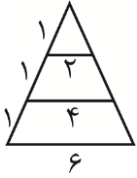
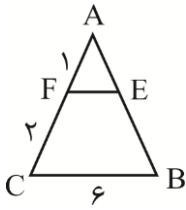
در این صورت قدر نسبت برابر:

یعنی هر یک واحد افزایش در ضلع AD از بالا به پایین باعث ۲ افزایش طول روی خطوط افقی می‌شه.

این مثال بی‌نی بد نیست.

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.





در شکل روبه‌رو EF موازی BC است. طول EF را به‌دست آورید.

تو این مثال علاوه بر راه‌حل معمول که همون تالس، می‌شه مثلث رو یک دوزنقه فرض کنی که طول قاعده‌ی بالاش صفره یعنی یک دنباله‌ی حسابی داریم که جمله‌ی اولش صفره و جمله‌ی چهارم $(4 = 1 + 3)$ مجموع نسبت‌ها) برابر ۶ پس قدر نسبت این دنباله $2 = \frac{6-0}{4-1}$ ، یعنی هر یک واحدی که روی ضلع AC پایین بیاییم، روی خطوط

موازی BC دو واحد افزایش طول داریم.

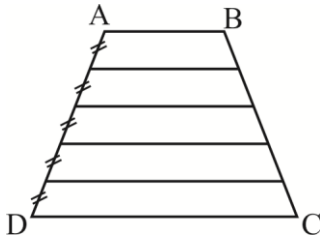
پس $EF = 2$.

توجه کنید در واقع به‌جای دنباله‌ی حسابی می‌شه، یک تابع درجه ۱ (خطی) در نظر گرفت که قدر نسبت دنباله‌ی حسابی همان شیب خط است و تفاضل جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله $(a_1 - d)$ همان عرض از مبدأ خط.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = dn + (a_1 - d)$$

۷- در شکل روبه‌رو تمامی خطوط موازی قاعده‌ها هستند و ساق AD را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر $AB = 3$ و

$DC = 5$ باشد، مجموع طول ۴ خط موازی قاعده‌ها چقدر است؟



- ۱۲ (۱)
- ۸ (۲)
- ۱۶ (۳)
- ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

می‌توانیم طول این خطوط و دو قاعده را مثل یک دنباله حسابی در نظر بگیریم. دقیقاً مثل این که بین دو عدد ۳ و ۵، چهار واسطه‌ی حسابی نوشته‌ایم و مجموع آنها را می‌خواهیم. در این صورت:

(میانگین دو عدد ۳ و ۵) (تعداد واسطه‌ها) = مجموع واسطه‌ها

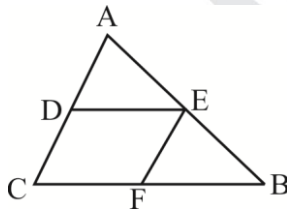
$$\text{مجموع واسطه‌ها} = 4 \times \frac{5+3}{2} = 16$$

یعنی:

البته می‌شه با رسم یک قطر و چند بار استفاده از تالس هم سوال را حل کرد ولی خوب، طولانی می‌شه.

۸- در شکل زیر چهار ضلعی CDEF متوازی‌الاضلاع است. اگر $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت مساحت چهار ضلعی به مساحت مثلث

ABC کدام است؟



- ۵۲ (۱)
- ۵ (۲)
- ۴۸ (۳)
- ۴ (۴)

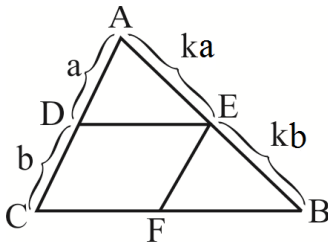
پاسخ: گزینه ۳

دو مثلث AED و EBF با مثلث ABC متشابه هستند. بنابراین نسبت مساحت آنها به مساحت ABC برابر مربع نسبت تشابه است.

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



دقت کنید:



$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$\frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

در این جا:

و

$$\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EB}{AB}\right)^2 = \frac{b^2}{(a+b)^2}$$

$$\frac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

در این جا:

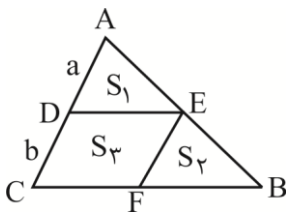
$$\frac{S_{CDEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{CDEF}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\frac{4+9}{25}\right) = \frac{12}{25} = 0.48$$

در این جا:

نکته:



$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{a^2}{(a+b)^2}$$

$$\frac{S_2}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{(a+b)^2}$$

$$\frac{S_3}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_1}{S_{ABC}} - \frac{S_2}{S_{ABC}} = \frac{2ab}{(a+b)^2}$$

۹- در مستطیل ABCD، نقطه P روی ضلع AB قرار دارد. اگر طول ضلع BC برابر ۶ باشد و PA=۴ و PB=۹، زاویه CPD برابر کدام است؟

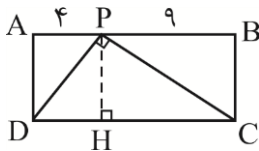
۹۰° (۴)

۶۰° (۳)

۳۰° (۲)

۴۵° (۱)

پاسخ: گزینه ۴



$$PH = BC = AD = 6 \text{ و } AP = DH \text{ و } PB = CH$$

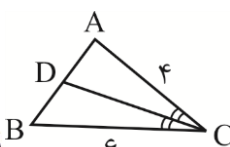
$$PH^2 = DH \times CH$$

$$6^2 = 4 \times 9$$

از طرفی:

بنابراین در مثلث DPC، PH ارتفاع وارد بر وتر است و $\hat{DPC} = 90^\circ$.

۱۰- در شکل زیر CD نیمساز زاویه C است و AC=۴ و BC=۶. نسبت مساحت ACD به مساحت ABC کدام است؟



۲/۳ (۱)

۰/۶ (۲)

۰/۵ (۳)

۰/۴ (۴)

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۴

چون فاصله هر نقطه روی نیم‌ساز از دو ضلع زاویه برابر است، نسبت مساحت ADC به BCD برابر نسبت قاعده‌هاست. یعنی:

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BCD}} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{BCD} + S_{ADC}} = \frac{4}{10}$$

۱۱- سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با مکعبی به طول یال ۲ زمانی که صفحه از انتهای سه یالی که در یک رأس مشترک هستند عبور کند، برابر کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (4)$$

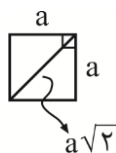
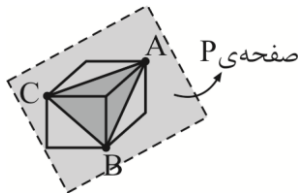
$$4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

مطابق شکل سطح مقطع، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و طول هر ضلع آن برابر قطر مربعی به ضلع ۲ یعنی $2\sqrt{2}$ است.



(نکته: در هر مربع به ضلع a ، طول قطر $a\sqrt{2}$ است.)

(نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است و طول ارتفاع آن $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است.)

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3} \times 8}{4} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر:

۱۲- خطوط $y = 2x$ و $2x + 3y = 8$ و محور x ها اضلاع یک مثلث می‌باشند. مساحت مثلث کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که یک ضلع افقی داریم (محور x) کافی است نقاط برخورد دو خط با آن را به دست آوریم و با محاسبه فاصله این دو نقطه طول قاعده را به دست آوریم. همین‌طور عرض نقطه‌ی برخورد دو خط دیگر ارتفاع وارد بر ضلع افقی می‌باشد.

$$2x + 3y = 8 \xrightarrow{y=2x} 2x + 3(2x) = 8$$

$$8x = 8 \Rightarrow x = 1, y = 2 \rightarrow$$

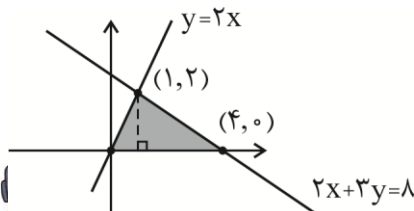
$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), \quad \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (4, 0)$$

بنابراین اندازه ارتفاع وارد بر قاعده برابر ۲ است

حال محل برخورد خطوط با محور x ها را به دست می‌آوریم:

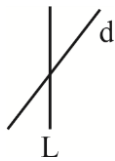
پس طول قاعده هم برابر ۴ است، بنابراین مساحت برابر:

$$S = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$



هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

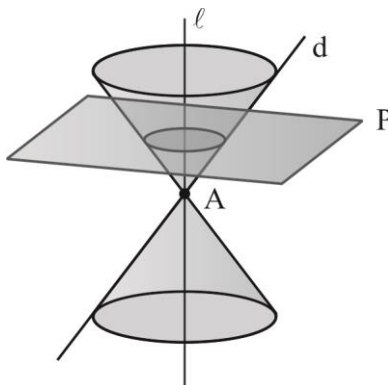
۱۳- خط d را حول خط L دوران می‌دهیم. سطح مقطع برخورد صفحه‌ای که موازی خط d است و از محل برخورد دو خط نمی‌گذرد، با سطح حاصل از دوران برابر کدام است؟



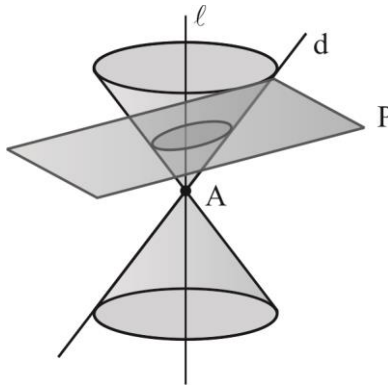
- (۱) بیضی
- (۲) دایره
- (۳) هذلولی
- (۴) سهمی

پاسخ: گزینه ۴

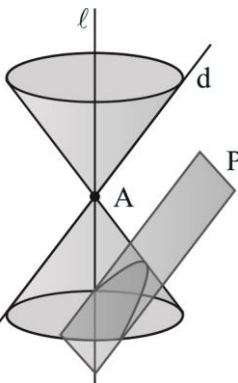
به سطح حاصل از دوران سطح مخروطی می‌گوییم و مقطع برخورد صفحه‌ی P در حالت‌های زیر مقاطع مخروطی متفاوت ایجاد می‌کند. صفحه‌ی P عمود بر L باشد و از رأس عبور نکند، شکل حاصل دایره است.



صفحه‌ی P بر L (محور دوران) عمود نباشد و موازی d یا دوران‌یافته‌های آن (مولد) نباشد و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی است.



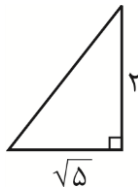
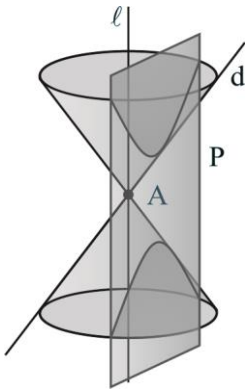
صفحه‌ی P موازی d یا یکی از دوران‌یافته‌های آن باشد (موازی مولد باشد) و از رأس نگذرد، شکل حاصل سهمی است.



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



صفحه P سطح مخروطی را هم در بالا و هم در پایین قطع کند و از رأس عبور نکند، شکل حاصل هذلولی است.



۱۴- مثلث روبه‌رو را حول وتر آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟

$$\frac{10\pi}{3} (2)$$

$$\frac{20\pi}{3} (1)$$

$$\frac{10\pi}{9} (4)$$

$$\frac{20\pi}{9} (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: در دوران مستطیل اگر حجم دوران نسبت به ضلعی به طول a را V_a بنامیم و حجم دوران نسبت به ضلعی به طول b را V_b بنامیم، داریم:

$$V_a \times a = V_b \times b$$

در مثلث قائم‌الزاویه هم همین‌طور است و داریم:

$$V_a \times a = V_b \times b = V_c \times c$$

بنابراین حجم حاصل از دوران حول ضلع به طول ۲ از مثلث را به‌دست می‌آوریم. حجم مخروط برابر یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است. بنابراین:

$$V_r = \frac{1}{3} \times \pi \times (\sqrt{5})^2 \times 2 = \frac{10\pi}{3}$$

حال، از نکته‌ی بالا استفاده می‌کنیم.

(طول وتر به کمک رابطه‌ی فیثاغورس برابر ۳ است.)

$$V \times 3 = V_r \times 2 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times \frac{10\pi}{3} \times 2 = \frac{20\pi}{9}$$

۱۵- مستطیلی با ابعاد ۳ و ۴ را حول خطی موازی ضلع بزرگتر آن که فاصله آن تا مستطیل دو واحد است، دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل برابر کدام است؟

$$68\pi (4)$$

$$74\pi (3)$$

$$58\pi (2)$$

$$84\pi (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

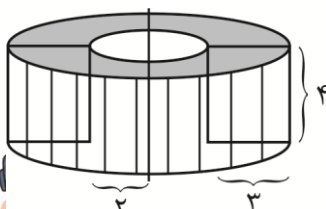
باید حجم دو استوانه را به‌دست آوریم و از هم کم کنیم تا حجم جسم حاصل از دوران را به‌دست آوریم: ابتدا حجم استوانه با ارتفاع ۴ و شعاع قاعده‌ی ۵:

$$V_1 = \pi \times 5^2 \times 4 = 100\pi$$

(حجم استوانه برابر مساحت قاعده در ارتفاع است.)

سپس حجم استوانه درونی با ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۲ را به‌دست می‌آوریم: $V_r = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$

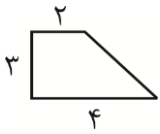
$$V = V_1 - V_r = 100\pi - 16\pi = 84\pi$$



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۶- دوزنقه شکل زیر را حول قاعده‌ی کوچک آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



- (۱) 20π
- (۲) 42π
- (۳) 30π
- (۴) 18π

پاسخ: گزینه ۳

جسم حاصل از دوران یک استوانه است که مخروطی را از آن برداشته‌ایم.

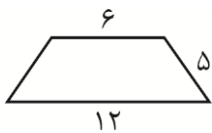
بنابراین ابتدا حجم استوانه را به دست می‌آوریم، سپس حجم مخروط را از آن کم می‌کنیم:

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi \quad (\text{استوانه})$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h' = \frac{\pi}{3} \times 3^2 \times 2 = 6\pi \quad (\text{مخروط})$$

$$V = V_1 - V_2 = 36\pi - 6\pi = 30\pi$$

۱۷- دوزنقه متساوی الساقین زیر را حول خطی که وسط دو قاعده را به هم وصل می‌کند، دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چقدر است؟



- (۱) 60π
- (۲) 114π
- (۳) 56π
- (۴) 84π

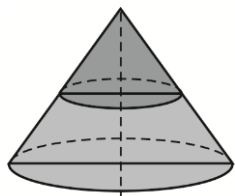
پاسخ: گزینه ۴

شکل حاصل از دوران مخروط ناقص است (مخروطی که از بالای آن مخروط کوچک‌تری را برداشته‌ایم).

پس ابتدا حجم مخروط بزرگ را به دست می‌آوریم، سپس حجم مخروط کوچک‌تر را از آن کم می‌کنیم.

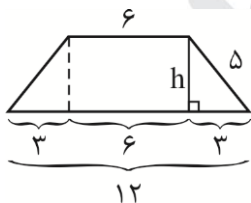
تا حجم مخروط ناقص را به دست آوریم.

به کمک فیثاغورس ارتفاع دوزنقه برابر ۴ است.



محور دوران

دقت کنید:

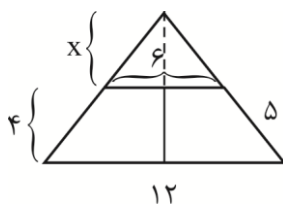


$$5^2 = h^2 + 3^2 \Rightarrow h = 4$$

همین‌طور به کمک تالس ارتفاع مخروط بزرگتر (ارتفاع مثلث متساوی الساقین روبه‌رو) برابر ۸ است.

$$\frac{x}{x+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4$$

بنابراین ارتفاع مثلث متساوی الساقین بزرگتر برابر ۴ + ۴ = ۸ است.



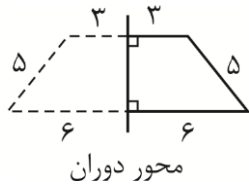
هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = 96\pi - 12\pi = 84\pi$$



و در آخر حجم مخروط ناقص برابر: است.
توجه کنید مسئله را می‌توان به این صورت بیان کرد که دوزنقه‌ی مقابل را حول ساق قائم آن دوران می‌دهیم.
همین‌طور که می‌بینید سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ی که شامل محور دوران باشد با جسم حاصل از دوران همان دوزنقه‌ی داده شده است.

۱۸- نقطه $M(2, 1)$ روی بیضی با کانون‌های $F(5, 5)$ و $F'(-3, 13)$ قرار دارد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{5} (4)$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{9} (3)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9} (2)$$

$$\frac{4}{5} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

طبق تعریف بیضی: $MF + MF' = 2a$

(مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی تا دو کانون برابر مقدار ثابت $2a$ که همان طول قطر بزرگ است، می‌باشد).

و $FF' = 2c$ (فاصله‌ی کانونی) بنابراین:

$$MF = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$$

$$MF' = \sqrt{(-3-2)^2 + (13-1)^2} = 13$$

$$MF + MF' = 5 + 13 = 18 = 2a \Rightarrow a = 9$$

$$FF' = \sqrt{(5+3)^2 + (5-13)^2} = 8\sqrt{2} = 2c \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$$

بنابراین خروج از مرکز برابر $e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ می‌باشد.

۱۹- اگر M نقطه‌ی دلخواهی روی محیط یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ و قطر کوچک $4\sqrt{2}$ باشد، محیط مثلث $MF'F$ برابر

کدام است؟

$$10 (4)$$

$$8 (3)$$

$$16 (2)$$

$$2 + 4\sqrt{2} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

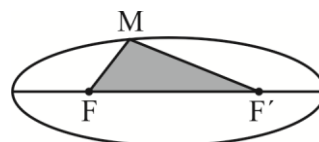
قطر کوچک بیضی برابر $4\sqrt{2}$ است، بنابراین $b = 2\sqrt{2}$. از طرفی خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ است، بنابراین $a = 3c$. حالا با قرار دادن

a و b در رابطه

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$9c^2 = 8 + c^2 \Rightarrow c = 1 \xrightarrow{a=3c} a = 3$$

$$MF'F \text{ مثلث: } (MF + MF') + FF' = 2a + 2c = 2(a + c) = 2(3 + 1) = 8$$



داریم:

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۲۰- در یک بیضی افقی مختصات یکی از کانون‌ها $F(3, 3)$ و مختصات یک سر قطر کوچک آن $B(0, 7)$ می‌باشد. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

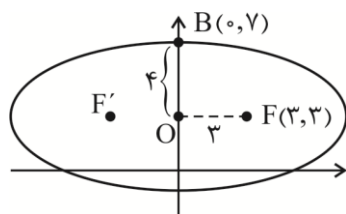
$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



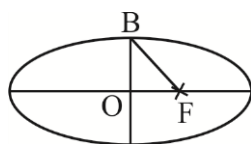
$OF = 3 = c$ $OB = 7 = b$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$

$\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ خروج از مرکز

دقت کنید طول $BF = a$.

۲۱- در بیضی زیر مثلث FOB قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$\frac{1}{6}$ (۱)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

زاویه‌ی $\angle OFB$ برابر $\angle OBF$ و برابر 45° هستند. از طرفی چون $OB = OF$ بنابراین $b = c$ و $a^2 = 2c^2$ و $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. نکته: کسینوس زاویه‌ی $\angle OFB$ برابر خروج از مرکز است.

۲۲- چهار خط $x = -2$ و $x = 8$ و $y = -1$ و $y = 7$ بر یک بیضی مماس هستند. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

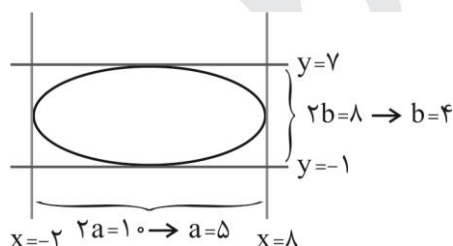
$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{1}{75}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱



مطابق شکل بیضی افقی است و قطر بزرگ آن $2a = 10$ (فاصله‌ی $x = -2$ تا $x = 8$) و قطر کوچک آن $2b = 8$ (فاصله‌ی $y = -1$ تا $y = 7$) بنابراین:

$a = 5, b = 4 \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} c = 3$

بنابراین خروج از مرکز برابر $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$



۲۳- اگر معادلات قطرهای یک دایره به صورت $(m-1)x + (m-2)y = 2$ و نقطه $A(-2, 2)$ روی محیط دایره باشد، اندازه شعاع دایره برابر کدام است؟

۱ (۴)

۵ (۳)

۴√۲ (۲)

۲√۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با انتخاب دو مقدار مناسب برای m مختصات مرکز دایره یعنی محل برخورد قطرهای را به دست می آوریم.

$$(m-1)x + (m-2)y = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{m=1} -y = 2 \Rightarrow y = -2 \\ \xrightarrow{m=2} x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow O(2, -2) \text{ مرکز دایره}$$

دقت کنید هر مقدار دلخواهی به m بدهیم همین نتیجه به دست می آید. مثلاً:

$$(m-1)x + (m-2)y = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{m=0} -x - 2y = 2 \\ \xrightarrow{m=3} 2x + y = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times 2} \left\{ \begin{array}{l} -2x - 4y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{array} \right. \\ \hline -3y = 6 \Rightarrow y = -2 \\ 2x - 2 = 2 \Rightarrow x = 2$$

در آخر فاصله O تا A را از فرمول فاصله دو نقطه به دست می آوریم.

$$OA = \sqrt{(x_0 - x_A)^2 + (y_0 - y_A)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = R$$

۲۴- دایره $x^2 + y^2 - 5x + 7y + 9 = 0$ از کدام نواحی محورهای مختصات عبور نمی کند؟

۴ سوم و چهارم

۳ اول و دوم

۲ دوم و سوم

۱ اول و چهارم

پاسخ: گزینه ۳

تنها کافی است که تعداد و محدوده نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات را بیابیم و اگر با هیچ محوری برخورد نداشت، مکان مرکز دایره را مشخص می کنیم.

به زبان ساده تر یک بار در معادله دایره به جای x صفر بگذاریم و تعداد و علامت ریشه های معادله به دست آمده را مشخص کنیم و یک بار به جای y صفر بگذاریم و تعداد و علامت ریشه های معادله به دست آمده را مشخص کنیم، یعنی:

$$x^2 + y^2 - 5x + 7y + 9 = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 + 7y + 9 = 0$$

$$\Delta = 49 - 36 = 13 > 0, \quad \frac{c}{a} = 9 > 0, \quad \frac{-b}{a} = -7 < 0$$

یعنی معادله دو ریشه منفی دارد، پس دایره محور y ها را در دو نقطه به عرض منفی قطع می کند، یعنی دایره حتماً از ناحیه سوم و چهارم عبور می کند.

$$x^2 + y^2 - 5x + 7y + 9 = 0 \xrightarrow{y=0} x^2 - 5x + 9 = 0$$

$$\Delta = 25 - 36 = -11 < 0$$

یعنی معادله ریشه ندارد، پس دایره محور x را قطع نمی کند و از ناحیه اول و دوم عبور نمی کند.

۲۵- شعاع دایره ای که دو نقطه $A(-1, 1)$ و $B(-2, 0)$ روی محیط آن قرار دارند و بر خط $y = 2$ مماس است، کدام است؟

۳ یا ۲ (۴)

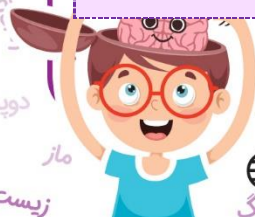
۵ یا ۱ (۳)

۳ یا ۱ (۲)

۵ یا ۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



فاصله $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره تا دو نقطه A و B یکسان است و برابر فاصله مرکز تا خط $y=2$ است، یعنی:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 + (\beta-1)^2} = \sqrt{(\alpha+2)^2 + \beta^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 - 2\beta + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \beta^2 \Rightarrow \alpha + \beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha - 1$$

فاصله O تا خط $y=2$ و نقطه A برابر است، پس:

$$\sqrt{(\alpha+1)^2 + (\beta-1)^2} = |\beta-2|$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 - 2\beta + 1 = \beta^2 - 4\beta + 4$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 2\beta - 2 = 0 \xrightarrow{\beta = -\alpha - 1} \alpha^2 + 2\alpha + 2(-\alpha - 1) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 2, \alpha = -2$$

$$\beta = -2 - 1 = -3, \beta = 2 - 1 = 1$$

بنابراین:

$$R = |\beta - 2| \Rightarrow R_1 = |-3 - 2| = 5, R_2 = |1 - 2| = 1$$

دقت کنید: خط $x + y + 1 = 0$ عمود منصف AB است.

نکته: برای به دست آوردن معادله عمود منصف علاوه بر روش معمول می‌توانیم از این روش استفاده کنیم که اگر $M(x, y)$ روی عمود منصف AB است. $MA = MB$ است و با ساده کردن معادله به معادله‌ی خط برسیم.

۲۶- فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از دورترین نقطه‌ی دایره $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$ برابر کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

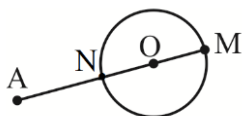
پاسخ: گزینه ۲

ابتدا مرکز و شعاع دایره را مشخص می‌کنیم.

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow O(1, -2), R=3$$

$$AM = AO + R$$



$$AO = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$AM = 5 + 3 = 8$$

و

بنابراین:

در ضمن فاصله A تا نزدیک‌ترین نقطه دایره $AN = |AO - R|$ است.

۲۷- شعاع دایره گذرنده از سه نقطه $A(1, 2)$, $B(-3, 2)$ و $C(1, 4)$ برابر کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

۳ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول:

اگر $O(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد، باید $OA = OB = OC = R$ باشد،

ولی حل این معادلات نسبتاً طولانی است.

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



روش دوم:

راه دیگر این است که مختصات این سه نقطه را در معادله‌ی غیر استاندارد دایره، یعنی: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ صدق دهیم و با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول a و b و c را به دست آوریم و با استاندارد کردن معادله شعاع را محاسبه کنیم. این راه هم نسبتاً طولانی است.

است. (در معادله غیر استاندارد $O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$ مرکز و $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4} - c}$ شعاع است.)

روش سوم:

در این سوال چون دو نقطه هم طول و دو نقطه‌ی هم عرض داریم (A و C دارای طول یکسانی هستند و A و B دارای عرض یکسان هستند)

کافیست عمود منصف AC و AB را با هم برخورد دهیم تا مختصات مرکز دایره را به دست آوریم. سپس فاصله آن تا یکی از نقاط را محاسبه می‌کنیم تا اندازه‌ی شعاع را به دست آوریم. دقت کنید اگر این شرایط وجود نداشت باید از یکی از دو روش قبل استفاده می‌کردیم.

عمود منصف $AB \Rightarrow (x = \frac{1+(-3)}{2} = -1)$, $A(1, 2)$, $B(-3, 2)$

عمود منصف $AC \Rightarrow (y = \frac{2+4}{2} = 3)$, $A(1, 2)$, $C(1, 4)$

پس $O(-1, 3)$ مرکز دایره است و $OA = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$

۲۸- معادله دایره‌ای که یکی از قطرهای آن خط $y = x + 1$ است و در نقطه‌ای به عرض ۳ بر محور y ها مماس است، کدام است؟

$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 9 = 0$ (۲)

$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$ (۱)

$x^2 - 4x + y^2 - 6y - 21 = 0$ (۴)

$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به این که مرکز دایره روی خط $y = x + 1$ و روی خط $y = 3$ است مختصات مرکز $(2, 3)$ می‌باشد.
 $y = x + 1 \xrightarrow{y=3} 3 = x + 1 \Rightarrow x = 2$
 از طرفی شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز تا خط مماس است یا همان طول مرکز یعنی $R = 2$
 پس معادله‌ی دایره به صورت:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4$
 $\Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$

روش دیگر استفاده از گزینه‌هاست. به این ترتیب که به دنبال گزینه‌ای بگردیم که:

اولاً: طول مرکز آن $x = 2$ باشد، یعنی ضریب x ، -4 باشد.

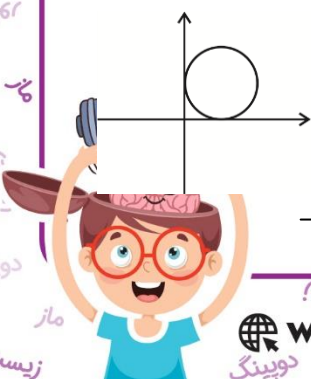
ثانیاً: با قرار دادن $x = 0$ در آن معادله به $y^2 - 6y + 9 = 0$ تبدیل شود. (در برخورد با محور y ریشه‌ی مضاعف $y = 3$ داشته باشد.)

نکته: معادله‌ی دایره‌ای که بر دو محور مختصات مماس است با توجه به مکان مرکز دایره به یکی از ۴ حالت زیر است:

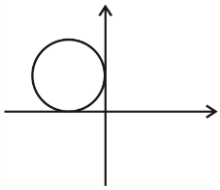
(۱) مرکز در ناحیه اول باشد.

$(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

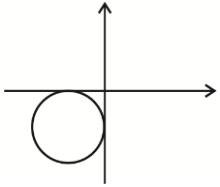


(۲) مرکز در ناحیه دوم باشد.



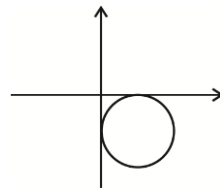
$$(x+R)^2 + (y-R)^2 = R^2$$

(۳) مرکز در ناحیه سوم باشد.



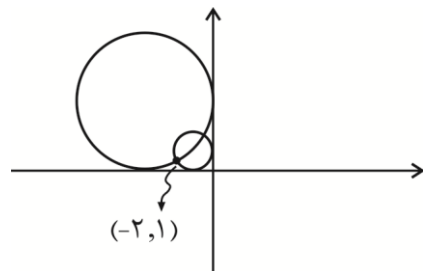
$$(x+R)^2 + (y+R)^2 = R^2$$

(۴) مرکز در ناحیه چهارم باشد.



$$(x-R)^2 + (y+R)^2 = R^2$$

در هر ۴ حالت تنها کافی است یک نقطه از دایره را داشته باشیم تا مقدار R را از حل یک معادله‌ی درجه ۲ به دست آوریم.
مثال: اگر نقطه‌ی $(-2, 1)$ روی دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات باشد مقدار شعاع را به دست آورید.
واضح است که دایره در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، بنابراین:



$$\begin{aligned} (-2+R)^2 + (1-R)^2 &= R^2 \\ \Rightarrow R^2 - 4R + 4 + R^2 - 2R + 1 &= R^2 \\ \Rightarrow R^2 - 6R + 5 &= 0 \Rightarrow R = 1, R = 5 \end{aligned}$$

۲۹- اگر فاصله‌ی نقاط برخورد خط $4y - 3x - 1 = 0$ با دایره‌ای به مرکز $(2, -2)$ برابر ۸ واحد باشد، مساحت دایره کدام است؟

20π (۴)

25π (۳)

32π (۲)

16π (۱)

پاسخ: گزینه ۳

مطابق شکل H وسط پاره‌خط AB است و AH برابر ۴ واحد است و در مثلث AOH داریم:

$$AO^2 = OH^2 + AH^2$$

از طرفی $AO = R$ و

$$OH = \frac{|4(-2) - 3(2) - 1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{5} = 3$$

بنابراین:

$$R^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow R^2 = 25$$

و مساحت دایره برابر πR^2 یعنی 25π است.

۳۰- وضعیت دو دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ نسبت به هم چگونه است؟

متداخل (۴)

مماس خارج (۳)

متقاطع (۲)

متخارج (۱)

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow O(1, -2), R=3$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1 \Rightarrow O'(-2, -1), R'=1$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{10}$$

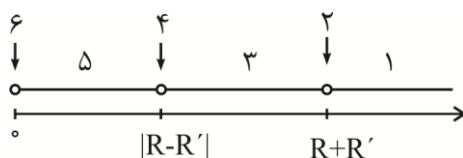
از طرفی:

و

$$R+R'=4, |R-R'|=2$$

پس $|R-R'| < OO' < R+R'$ و دو دایره متقاطع اند.

نکته: اگر روی یک محور $R+R'$ و $R-R'$ را مشخص کنیم بسته به مکان OO' که در کدام قسمت قرار می گیرد وضعیت دو دایره را مشخص می کنیم.



ناحیه ۱: متخارج



ناحیه ۲: مماس خارج (یا مماس برون)



ناحیه ۳: متقاطع



ناحیه ۴: مماس داخل (یا مماس درون)



ناحیه ۵: متداخل



ناحیه ۶: هم مرکز



هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

